
Übungen zur Vorlesung:
Landesvermessung

Blatt 2: **Numerische Integration mit MATLAB**

Integrale und Differentialgleichungen können mit verschiedenen Verfahren gelöst werden. Neben der analytischen Integration und der genäherten Lösung durch Reihenentwicklungen ist auch eine numerische Integration oder eine genäherte diskretisierte Summation möglich.

2.1 Länge eines Meridianbogens

Die Länge eines Meridianbogens ab dem Äquator auf einem Ellipsoid sei mit G bezeichnet. Sie ist eine wichtige Größe bei der Berechnung von eben konformen Koordinaten wie z.B. GK oder UTM und folgt aus der differentiellen Beziehung $dG = M dB$:

$$G = \int_0^B M dB = a(1 - e^2) \int_0^B \frac{dB}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}^3 .$$

Dies ist ein elliptisches Integral, das sich nicht elementar integrieren läßt. Es soll nun mit den verfügbaren Matlab-Routinen für eine numerische Integration berechnet werden.

- i) Berechnen Sie durch numerische Integration mit Hilfe des `quad`-Befehls die Länge des Meridianbogens zwischen $B_1 = 30^\circ 09'$ und $B_2 = 38^\circ 15'$ mit cm-Genauigkeit.
- ii) Die Strecke auf der Ellipsoidoberfläche zwischen zwei Breitenkreisen mit 1° Abstand ist nicht konstant. Stellen Sie diesen Sachverhalt zwischen Äquator und Pol dar.

2.2 Isometrische Breite

Die Existenz einer isometrischen Breite ist Voraussetzung für eine winkeltreue Abbildung. Auf einem Ellipsoid ergibt sie sich aus:

$$q = \int_0^B \frac{M}{N \cos B} dB = \int_0^B \frac{1 - e^2}{\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)} dB .$$

Eine direkte Lösung dieser Integralgleichung lautet

$$q = \operatorname{artanh}(\sin B) - e \operatorname{artanh}(e \sin B) .$$

- i) Berechnen Sie die isometrischen Breiten vom Äquator bis zum Pol mittels numerischer Integration (`quad`-Befehl) für eine bestimmte Schrittweite in B (z.B. 0.1°) und eine bestimmte Integrationstoleranz (z.B. 10^{-6}) und stellen Sie diese graphisch dar.
- ii) Berechnen Sie noch einmal die isometrischen Breiten vom Äquator bis zum Pol, diesmal mit Hilfe der direkten Formel und stellen Sie diese erneut graphisch dar.
- iii) Vergleichen Sie die Ergebnisse der numerischen Integration $q_{numerisch}$ mit den Werten aus der direkten Berechnung q_{direkt} durch Darstellung der Differenzen $q_{numerisch} - q_{direkt}$ vom Äquator bis zum Pol. Verwenden Sie dabei für die numerische Integration mindestens drei verschiedene Schrittweiten in B (z.B. 0.1° , 1.0° , 10°) und mindestens drei verschiedene Integrationstoleranzen (z.B. 10^{-6} , 10^{-9} , 10^{-12}). Diskutieren Sie anhand Ihrer Darstellungen die Eigenschaften der verwendeten numerischen Integration.

Tips:

- `help quad`
- Der Aufruf kann lauten: `G = quad(@merbog,B1,B2,1e-10,[],a,e2)`
mit der Funktion: `function G = merbog(B,a,e2)`

Bezugsellipsoid sei das Bessel-Ellipsoid ($a = 6377397.155$ m; $b = 6356078.963$ m).