Inst. für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Dipl.-Ing. Claudia Stummer, Zi. 2614
stummer@bv.tum.de

Wintersemester 2011/12

Übungen zu

**Erdmessung 1**

Blatt1: **Kugelflächenfunktionen**

Das folgende Rekursionsschema ermöglicht die Berechnung der zugeordneten Legendre Funktionen (siehe Skript, Formeln (5.29,a-c) und Abbildung 5.5):

$$
\begin{aligned}
P_{n,n}(t) &= (2n-1)\,(1-t^2)^{1/2}\,P_{n-1,n-1}(t) \\
P_{n,n-1}(t) &= (2n-1)\,t\,P_{n-1,n-1}(t) \\
P_{n,m}(t) &= \frac{2n-1}{n-m}\,t\,P_{n-1,m}(t) - \frac{n+m-1}{n-m}\,P_{n-2,m}(t)
\end{aligned}
$$

1. Berechnen Sie nach diesem Schema die Legendre Funktion $P_{31}(t)$ analytisch.

2. Schreiben Sie eine Funktion `legfun(n,m,t)`, die die zugeordneten Legendre Funktionen von beliebigem Grad $n$ und Ordnung $m$ berechnet. Das Argument $t$ soll als Vektor eingegeben werden können.

3. Berechnen Sie mit der erstellten Funktion die Legendre Funktionen von Grad $n = 3$ für die Ordnungen $m = \{0, 1, 2, 3\}$ und für $t = \cos\theta = [-1; 1]$. Stellen Sie Ihr Ergebnis graphisch dar und diskutieren Sie die Funktionen bezüglich Symmetrieeigenschaften und Anzahl der Nullstellen.

4. Zusammen mit den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus definieren die Legendre Funktionen einen Satz von Basisfunktionen auf der Kugeloberfläche, die so genannten Kugelflächenfunktionen

$$
\begin{aligned}
Y_{nm}^c &= P_{nm}(\cos\theta)\,\cos(m\lambda) \\
Y_{nm}^s &= P_{nm}(\cos\theta)\,\sin(m\lambda)
\end{aligned}
$$

   Ähnlich einer Fourierreihe (mit Basisfunktionen Sinus und Kosinus) lassen sich beliebige Funktionen auf der Kugel durch einen Linearkombination verschiedener Kugelflächenfunktionen darstellen.

   Stellen Sie die folgenden Kugelflächenfunktionen in einem globalen Gitter dar und diskutieren Sie wieder das Nullstellenmuster (wodurch unterscheiden sich $Y_{nm}^c$ und $Y_{nm}^s$?):

   - $Y_{30}^c$ (zonal, $m = 0$)
   - $Y_{31}^c$ (tesseral, $n \neq m, m \neq 0$)
   - $Y_{31}^s$ (tesseral, $n \neq m, m \neq 0$)
   - $Y_{33}^c$ (sektoriell, $n = m$).

5. **Freiwillig:** Aus der Summe gewichteter Kugelflächenfunktionen (entspricht Synthese), lässt sich eine beliebige Funktion auf der Kugel darstellen. Die Gewichte werden später als Schwerefeld und/oder Potentialkoeffizienten $C_{nm}/S_{nm}$ bezeichnet. Die $C_{nm}/S_{nm}$ können beispielsweise aus Schwerefeldmissionen

(CHAMP, GRACE, GOCE) bestimmt werden. Hat man die Potentialkoeffizienten durch Satellitenbahnanalysen bestimmt, lässt sich die gesuchte Funktion auf der Erde - z.B. das Schwerefeld der Erde - aus der Summe gewichteter Kugelflächenfunktionen "zusammenbauen". Um die Rolle der Gewichte (= Potentialkoeffizienten) zu verdeutlichen, plotten Sie z.B. die Summe der Kugelflächenfunktionen mit den verschiedenen Gewichten a,b,c,d. Es entstehen zwei völlig unterschiedliche Funktionen.

$a * Y_{21}^c + b * Y_{31}^c + c * Y_{31}^s + d * Y_{33}^c$ jeweils mit (a=0.01/0.9, b=0.5/0.01, c=0.8/0.6, d=0.1/0.17)

**Punkte: 20**
**Abgabetermin: Donnerstag, 03. November 2011** *Viel Erfolg !*