Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Michael Murböck, Raum 2612
murboeck@bv.tum.de

Wintersemester 2011/12

Übungen zu

Erdmessung 1

Blatt 7: **Physikalische Bedeutung der niederen Potentialkoeffizienten**

Gegeben seien die vollständig normierten Potentialkoeffizienten von Grad 0, 1 und 2 des Modells $\mathrm{EGM2008}$

n	$\bar{S}_{n2}$	$\bar{S}_{n1}$	$\bar{C}_{n0}$	$\bar{C}_{n1}$	$\bar{C}_{n2}$
0			1.00000		
1		0.00000	0.00000	0.00000	
2	$-1.40027 \cdot 10^{-6}$	$1.38441 \cdot 10^{-9}$	$-4.84165 \cdot 10^{-4}$	$-2.06616 \cdot 10^{-10}$	$2.43938 \cdot 10^{-6}$

sowie die folgenden Konstanten:

G = 6.6726$\cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
GM = 3.986005$\cdot 10^{14}$ m^3 s^{-2}
R = 6.378137$\cdot 10^{6}$ m

Maßstab und Koordinatenursprung (Grad 0 und 1)

1.1 Warum gilt $C_{0,0} = 1$?

1.2 Was bedeutet $C_{1,0} = C_{1,1} = S_{1,1} = 0$?

1.3 Welche Werte nehmen die Koeffizienten von Grad 1 an, wenn man das Koordinatensystem

a) 12 m in Richtung Nordpol

b) 6 m in Richtung München ($48.15°$ n.Br., $11.57°$ ö.L.)

verschiebt?

Trägheitstensor (Grad 2)

2.1 Der Trägheitstensor $\boldsymbol{I}$ der Erde ist eine symmetrische 3×3 Matrix mit 6 unabhängigen Elementen. Um den vollständigen Tensor aus den 5 Potentialkoeffizienten zweiten Grades zu berechnen benötigt man also eine zusätzliche Information. Diese sei in Form des, aus der Präzessionsbewegung der Erde ableitbaren, Parameters

$$H = \frac{I_{zz} - \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy}\right)}{I_{zz}} = 0.003273788$$

gegeben. Berechnen Sie die Elemente des Trägheitstensors aus den oben gegebenen Potentialkoeffizienten des Modells $\mathrm{EGM2008}$.

2.2 Eine Hauptachsentransformation entspricht der Rotation eines beliebigen körperfesten Bezugssystems in die Hauptträgheitsachsen des Körpers. Der Trägheitstensor nimmt dann Diagonalgestalt an, wobei die Diagonalelemente den Hauptträgheitsmomenten und die zugehörigen Koordinatenachsen den Hauptträgheitsachsen entsprechen.

Für die Hauptachsentransformation mit einer Eigenwertzerlegung gibt es die MATLAB-Funktion `eig.m`. Die Matrix der Eigenvektoren entspricht der Rotationsmatrix der Hauptachsentransformation.

a) Wie groß sind die Hauptträgheitsmomente?

b) Bestimmen Sie Drehachse $\boldsymbol{e}$ und Drehwinkel Φ entsprechend der unten beschriebenen Euler'schen Rotationsdarstellung.

c) Erläutern Sie die Ergebnisse von Teilaufgabe b) im Hinblick auf das vereinbarte erdfeste Koordinatensystem.

Formeln zu Eulerachse und Eulerwinkel:

Die allgemeine Richtungskosinus-Matrix oder Rotationsmatrix $\boldsymbol{A}$ lautet in der Schreibweise mit Eulerwinkel Φ und Eulerachse $\boldsymbol{e} = [e_1 \;\; e_2 \;\; e_3]'$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\Phi + {e_1}^2(1-\cos\Phi) & e_1e_2(1-\cos\Phi) + e_3\sin\Phi & e_1e_3(1-\cos\Phi) - e_2\sin\Phi \\ e_1e_2(1-\cos\Phi) - e_3\sin\Phi & \cos\Phi + {e_2}^2(1-\cos\Phi) & e_2e_3(1-\cos\Phi) + e_1\sin\Phi \\ e_1e_3(1-\cos\Phi) + e_2\sin\Phi & e_2e_3(1-\cos\Phi) - e_1\sin\Phi & \cos\Phi + {e_3}^2(1-\cos\Phi) \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{spur}(\boldsymbol{A}) = 1 + 2\cos\Phi$.

Ist $\boldsymbol{A}$ gegeben, so gilt:

$$\begin{aligned} \Phi &= \arccos\left(\frac{\mathrm{spur}(\boldsymbol{A}) - 1}{2}\right) \\ e_1 &= \frac{A_{23} - A_{32}}{2\sin\Phi} \\ e_2 &= \frac{A_{31} - A_{13}}{2\sin\Phi} \\ e_3 &= \frac{A_{12} - A_{21}}{2\sin\Phi} \; . \end{aligned}$$

Punkte: 20
Abgabetermin: Donnerstag, 16.02.2012 *Viel Erfolg !*

Formelsammlung zum 7. Übungsblatt

Die Formeln auf diesem Blatt sind eine Zusammenfassung der Formeln in Kapitel 1.4 des Vorlesungsskripts Erdmessung, Teil III.

Potentialkoeffizienten und Massenverteilung. Formel (1.85) zeigt den Zusammenhang zwischen Kugelfunktionskoeffizienten und Massenverteilung der Erde. Mit $H_{nm}^2 = (2-\delta_{m,0})(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$ kann man in leicht abgewandelter Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{c} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array}\right\} = (2-\delta_{m,0})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{1}{MR^n}\iiint r^n P_{nm}(\cos\theta)\left\{\begin{array}{c} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array}\right\}\mathrm{d}m \ ,$$

wobei dm das Massenelement $\mathrm{d}m = \rho(\boldsymbol{r}_Q)\mathrm{d}\Sigma_Q$ darstellt. In kartesischen Koordinaten lauten die Kugelfunktionen, siehe auch (1.89):

$$\begin{array}{llcl@{\quad}c@{\quad}l}
n=0: & r^0 P_{0,0}(\cos\theta) & = & 1 & & \\
n=1: & r^1 P_{1,0}(\cos\theta) & = & r\cos\theta & = & z \\
 & r^1 P_{1,1}(\cos\theta)\cos\lambda & = & r\sin\theta\cos\lambda & = & x \\
 & r^1 P_{1,1}(\cos\theta)\sin\lambda & = & r\sin\theta\sin\lambda & = & y \\
n=2: & r^2 P_{2,0}(\cos\theta) & = & r^2\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) & = & \frac{1}{2}(2z^2-x^2-y^2) \\
 & r^2 P_{2,1}(\cos\theta)\cos\lambda & = & r^2 3\sin\theta\cos\theta\cos\lambda & = & 3xz \\
 & r^2 P_{2,1}(\cos\theta)\sin\lambda & = & r^2 3\sin\theta\cos\theta\sin\lambda & = & 3yz \\
 & r^2 P_{2,2}(\cos\theta)\cos 2\lambda & = & r^2 3\sin^2\theta\cos 2\lambda & = & 3(x^2-y^2) \\
 & r^2 P_{2,2}(\cos\theta)\sin 2\lambda & = & r^2 3\sin^2\theta\sin 2\lambda & = & 6xy
\end{array}$$

Durch Einsetzen der kartesischen Kugelfunktionen in die obige Formel ergeben sich folgende Zusammenhänge.

Für n=0:

$$C_{0,0} = \frac{1}{M}\int \mathrm{d}m = 1$$

Der Koeffizient $C_{0,0}$ ist also definitionsgemäß 1.

Für n=1:

$$\begin{aligned}
C_{1,0} &= \frac{1}{MR}\int z\mathrm{d}m = \frac{1}{R}z_M \\
C_{1,1} &= \frac{1}{MR}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{R}x_M \\
S_{1,1} &= \frac{1}{MR}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{R}y_M
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten von Grad 1 repräsentieren die Koordinaten des Massenzentrums $\boldsymbol{r}_M = (x_M, y_M, z_M)$ im gewählten Koordinatensystem.

Für n=2: (mit MR^2 multipliziert)

$$\begin{aligned}
MR^2C_{2,0} &= \tfrac{1}{2}\int(2z^2-x^2-y^2)\mathsf{d}m &&= \tfrac{1}{2}(I_{xx}+I_{yy})-I_{zz}\\
MR^2C_{2,1} &= \int xz\mathsf{d}m &&= -I_{xz}\\
MR^2S_{2,1} &= \int yz\mathsf{d}m &&= -I_{yz}\\
MR^2C_{2,2} &= \tfrac{1}{4}\int(x^2-y^2)\mathsf{d}m &&= \tfrac{1}{4}(I_{yy}-I_{xx})\\
MR^2S_{2,2} &= \tfrac{1}{2}\int xy\mathsf{d}m &&= -\tfrac{1}{2}I_{xy}
\end{aligned}$$

Trägheitstensor $\boldsymbol{I}$. Siehe auch Kapitel 6.3 im Vorlesungsskript *Grundlagen der Erdmessung I (Theoretische Mechanik)*.

$$\boldsymbol{I}=\int\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}\mathsf{d}m=\int(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}')\mathsf{d}m\ ,$$

oder in Indexnotation:

$$I_{ij}=\int(r^2\delta_{ij}-x_ix_j)\mathsf{d}m\ .$$

Dieser Tensor gibt die Trägheitsmomente eines Körpers bezüglich der Achsen des gewählten Koordinatensystems an.

Normierung der Potentialkoeffizienten. Für den Zusammenhang zwischen vollständig normierten und konventionellen (unnormierten) Potentialkoeffizienten $\bar{K}_{nm}$ bzw. K_{nm} gilt:

$$K_{nm}\ =\ H_{nm}\cdot\bar{K}_{nm}$$

mit

$$H_{nm}\ =\ \begin{cases}\sqrt{2n+1} & ;\ \text{für } m=0\\ \sqrt{2(2n+1)\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & ;\ \text{für } m\neq 0\end{cases}$$